

COMPARATIVE ANALYSIS OF NUMERICAL METHODS FOR SOLVING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Haydarova S.

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor

Kokand State Pedagogical Institute

Republic of Uzbekistan

ANNOTATION

This article presents numerical methods for solving ordinary differential equations and a comparative analysis of these methods.

Keywords and expressions: numerical methods, approximate methods, Euler, Adams, Runge-Kutta methods.

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ СОНЛИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИНИ ҚИЁСИЙ ТАҲЛИЛИ

Ҳайдарова С., т.ф.н

доцент

Қўқон давлат педагогика институти

Ўзбекистон Республикаси

АННОТАЦИЯ

Ушбу мақолада оддий дифференциал тенгламаларни сонли ечиш усуллари ва уларнинг қиёсий таҳлили келтирилган.

Таянч сўз ва иборалар: сонли усуллар, тақрибий ечим, Эйлер, Адамс, Рунге – Кутта усуллари.

Ҳозирги даврда фан ва техниканинг ривожланиши, замонавий компьютерларнинг яратилиши ҳисоблаш математикасининг мавқеини янада оширди. Халқ хўжалигининг турли соҳаларида мураккаб ҳисоблаш ишларини олиб бориш мутахассислар учун кўп қийинчиликлар туғдириб келаётган бир даврда ҳисоблаш машиналарининг *ёрдамга* келиши уларнинг меҳнатини енгиллаштиришга имкон берди.

Бизга маълумки, ҳисоблаш математикасининг зарурий таркибий қисми – бу сонли усуллар назариясидир. Бу назария сонли усулларни ишлаб чиқиш билан шуғулланади. Масалани ечишнинг сонли усули – бу ечимнинг жадвал кўринишидаги сонли қийматларини олиш усули бўлиб, амалиётда кўпинча формула (ечимнинг аналитик кўриниши) эмас, балки сонли қийматларни олиш талаб этилади. Сонли усуллардан олий алгебра, математик таҳлил масалалари ва бошқа масалаларни ечишда кенг фойдаланиб келинмоқда.

Оддий дифференциал тенгламалардан фан ва техниканинг турли соҳаларидаги жараён ва ҳодисаларни математик моделлаштиришда фойдаланилади, шунингдек, аналитик ечимни маълум функциялар орқали ифодаб бўлмаган тақдирда сонли усулларга

мурожаат қилиш лозим бўлади. Лекин тажрибалар шуни кўрсатдики, баъзи масалалар учун аналитик ечим мавжуд бўлган тақдирда ҳам уларни сонли ечиш анча самарали ҳисобланади.

Тақрибий усулларни 3 турга бўлиш мумкин:

а) аналитик усул

б) график усул

в) сонли усул

Аналитик усул тақрибий ечимни аналитик кўринишда топиш имконини беради. Бундай усулларга мисол қилиб номаълум коэффициентлар усулини, ўзгарувчи коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламаларни интеграллаш учун қўллаш мақсадга мувофиқдир. График усул эса тақрибий ечимни интеграл чизиқлар орқали ифодалаш имконини беради. Унга мисол қилиб изоклиналар усули ва Эйлер синиқ чизиғини усулларини келтириш мумкин.

Лекин юқорида айтиб ўтилган бу икки усул жуда катта миқдордаги ҳисоб – китоб ишларини бажаришни талаб этади. Шунинг учун бу маънода сонли усуллардан фойдаланиш самаралироқ деб ҳисоблаймиз.

Сонли усуллар тақрибий ечимни жадвал кўринишида олиш имконини беради.

Коши масаласини ечишнинг сонли усулларини кўриб чиқиш орқали, олинган натижаларни таҳлил қилиш натижасида қайси усул юқори аниқликдаги ечимни олиш имконини беришини аниқлаш муҳим аҳамият касб этади.

Ушбу $y' = f(x, y)$ биринчи тартибли дифференциал тенглама берилган бўлсин. Бундай дифференциал тенгламанинг берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимни топиш Коши масаласи дейилади, яъни у қуйидагича тавсифланади:

Биринчи тартибли $y' = f(x, y)$ (1) тенгламанинг кесмада $Y|_{x=x_0} = Y_0$ (2) бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Бу масалани ечишни бир неча сонли усуллари мавжуд. Улар жумласига Эйлер, Адамс, Рунге – Кутта усулларини киритиш мумкин.

Булардан ташқари Эйлернинг такомиллаштирилган усули, Милн усули ва бошқаларни келтириш мумкин.

Қуйида биз кўриб чиқилган усулларнинг афзалликлари, камчиликлари, уларнинг фарқини, яъни аниқ ечим билан тақрибий ечим орасидаги фарқни таққослаб чиқамиз.

Шуни айтиш лозимки, Эйлер усули катта аниқликдаги ечимни топиш имконини бермайди. У бошқа усулларга нисбатан қўпол бўлиб, тахминий ҳисоб – китоблар учун мўлжалланган.

Лекин унинг асосига қўйилган ғоялар бошқа усулларни ишлаб чиқиш учун хизмат қилади.

Текширишлар, амалий масалаларни ечиш натижалари шуни кўрсатдики, Адамс усули Эйлер усулига нисбатан анча аниқроқ усул бўлиб, унда абсолют ва нисбий хатоликларни янада камайтириш, яъни катта аниқлик ҳосил қилиш имкони мавжуд, бу албатта Адамс формуласидаги ҳадлар сонини ошириш ҳисобидан амалга оширилади.

Адамс усулининг камчилиги шундаки, ундаги жадвалнинг мураккаблиги, турли айирмаларни ҳамда функция қийматларини топиш, функциянинг кейинги

қийматларини топиш учун аввалги тугун нуқталардаги қийматлари тўғрисидаги маълумотларни билиш анча қийинчиликлар туғдиради.

Рунге – Кутта усули эса бошқа аввалги усулларга нисбатан яхши аниқлик беради, бу интеграллаш қадами h ни 2 марта камайтириш ҳамда унда фақат биринчи тартибли айирмалар иштирок этганлиги учун ечимни янада аниқлаштириш имконини беради.

Хулосалар компьютерда олинган натижаларга асосланади. Бундай натижалар иловада келтирилган.

Юқорида ушбу $y' = 1 + x$ дифференциал тенгламининг $X_0=0$, $Y_0=1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи тақрибий қийматларини Эйлер, Адамс ва Рунге – Кутта усули билан аниқладик.

Ушбу Коши масаласи мисолида олинган натижаларни аниқ ечим билан солиштирамиз ва ҳар бир қиймат учун абсолют, нисбий хатоликларни аниқлаймиз.

Ҳар бир усул учун олинган натижаларни жадвалга ёзамиз. (1 – жадвал).

Жадвалдаги натижаларни солиштириш шуни кўрсатдики, Рунге – Кутта усули билан топилган тақрибий ечим энг яхши ечим, катта аниқлик берувчи ечим бўлиб, у аниқ ечимга энг яқин, баъзи қийматлар учун (қадам учун) улар бир хил бўлиб, устма – уст тушади, масалан, $X=0; 0,1; 0,2$ даги тақрибий ечим аниқ ечим билан бир хилдир.

1 – жадвал

X_n	Y_n (тақрибий ечим)			Аниқ ечим $y = 2e^x - x - 1$ $y' = y + x$ тенглама
	Эйлер усули	Адамс усули	Рунге – Кутта	
$X_0=0$	1	1	1	1
$X_1=0,1$	1,1	1,110333	1,110342	1,110342
$X_2=0,2$	1,22	1,242667	1,242805	1,242805
$X_3=0,3$	1,362	1,399467	1,399717	1,399718
$X_4=0,4$	1,5282	1,583273	1,583648	1,583649
$X_5=0,5$	1,72102	1,796925	1,797441	1,797443
$X_6=0,6$	1,943122	2,043542	2,044236	2,044238
$X_7=0,7$	2,197434	2,326575	2,327503	2,327505
$X_8=0,8$	2,48713	2,650021	2,651079	2,651082
$X_9=0,9$	2,815895	3,017879	3,019203	3,019206
$X_{10}=1$	3,187485	3,434954	3,43656	3,436564

Энди $X=0,4$ ва $X=1$ даги тақрибий қийматлар учун абсолют ва нисбий хатоликларни ҳар бир усул учун ҳисоблаймиз (компьютерда олинган натижалар бўйича):

1) Эйлер усули бўйича тақрибий ечим $X=0,4$ да $y|_{x=0,4} = 1,5282$

Аниқ ечим $\bar{Y}|_{x=0,4} = 1,583649$

Абсолют хатолик $1,5836 - 1,5282 = 0,0554$

Нисбий хатолик эса $\frac{0,0554}{1,5836} = 0,035 \approx 4\%$

$X=1$ да $y|_{x=1} = 3,1875$ тақрибий ечим,

Аниқ ечим $\bar{Y}|_{x=1} = 3,4366$

Абсолют хатолик $3,4366 - 3,1875 = 0,2491$

Нисбий хатолик эса $\frac{0,2491}{3,4366} = 0,072 \approx 7\%$

2) Адамс усули бўйича тақрибий ечим

$X=0,4$ да $y|_{x=0,4} = 1,5833$

Аниқ ечим $\bar{Y}|_{x=0,4} = 1,5836$

Абсолют хатолик $1,5836 - 1,5833 = 0,0003$

Нисбий хатолик эса $\frac{0,0003}{1,5836} = 0,002 \approx 0,02\%$

$X=1$ да тақрибий ечим $y|_{x=1} = 3,4350$,

Аниқ ечим $\bar{Y}|_{x=1} = 3,4366$

Абсолют хатолик $3,4366 - 3,4350 = 0,0016$

Нисбий хатолик эса $\frac{0,0016}{3,4366} \approx 0,0005 = 0,05\%$

3) Рунге – Кутта усули бўйича тақрибий ечим

$X=0,4$ да $y|_{x=0,4} = 1,583648$

Аниқ ечим $\bar{Y}|_{x=0,4} = 1,583649$

Абсолют хатолик $1,583649 - 1,583648 = 0,000001$

Нисбий хатолик эса $\frac{0,000001}{1,583649} = 0,0000006 = 0,00006\%$

$X=1$ да тақрибий ечим $y|_{x=1} = 3,43656$,

Аниқ ечим $\bar{Y}|_{x=1} = 3,436564$

Абсолют хатолик $3,436564 - 3,43656 = 0,000004$

Нисбий хатолик $\frac{0,000004}{3,436564} = 0,000001 = 0,0001\%$

Олинган натижаларни таҳлил қилиш шуни кўрсатдики, Рунге – Кутта усули билан топилган тақрибий ечимлар учун абсолют ва нисбий хатоликлар жуда кичик миқдорни ташкил этади.

Адамс усулида эса бу миқдорлар бир оз юқори, лекин Эйлер усулида эса улар анча юқори бўлиб, Эйлер усулини фақат ҳисоблашларни ориентация қилишда қўллаш мумкин деган хулосага келамиз.

Олинган натижаларни жадвал усулида келтирамиз (илова 1 ва илова 2).

Илова 1

X_n	Абсолют хатолик		$Y = y+x$
	Эйлер	Адамс	Рунге – Кутта
$X = 0,4$	0,0554	0,0003	0,000001
$X = 1$	0,2491	0,0016	0,000004

Илова 2

X_n	Нисбий хатолик		$Y' = y+x$
	Эйлер	Адамс	Рунге – Кутта
$X = 0,4$	4 %	0,02 %	0,00006 %
$X = 1$	7 %	0,05 %	0,0001 %

REFERENCES

1. А.А. Абдуқодиров. Ҳисоблаш математикаси ва дастурлашдан лаборатория ишлари. Т., “Ўқитувчи”, 1993.
2. А.А. Абдуқодиров, Ф.Н. Фозилов. Ҳисоблаш математикаси ва программалаш. Т., “Ўқитувчи”, 1996.
3. М.С. Салохитдинов, Ф.Н. Насритдинов. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, “Ўзбекистон”, 1994.
4. Rasulova, N. (2022). Building submodels for an adaptive learning system. *Scientific Collection «InterConf»*, (126), 71-74.
5. Исломов, И. Н., Сагдуллаев, П. К. (2016). Марказий Осиё давлатлари иқтисодий ва ижтимоий географияси фанидан электрон дарслик. Тошкент, 1(1), 220.
6. Сагдуллаев, П. К., Мирзаева, Г. О. (2015). Кадрларни қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини оширишда ахборот-коммуникацион технологиялардан фойдаланиш. Педагогик кадрлар тайёрлаш, 1(1), 232-233.
7. Sagdullayev, P. K., Mamadaliyeva, A. (2014). Differences between American English and British English. Десятые Виноградовские чтения, 1(1), 470-473.
8. Sagdullayev, P. K. (2014). The features of Sonorants. Десятые Виноградовские чтения, 1(1), 465-467.
9. Maksumov, A. G.; Sagdullayev, P. K. (2012). Xorijiy til ta'limini modernizatsiya qilish muammolari. Xorijiy til ta'limini modernizatsiya qilish muammolari, 1(1), 129-131.
10. Nuritdinovna Ilhamova, I., Rasuleva, N. Z., Dzugaeva, Z. R., Tashmetova, S., & Pulatova, Z. A. (2020). Content and technology of teacher training in pedagogy and psychology. *PalArch's Journal of Archaeology of Egypt/Egyptology*, 17(6), 11076-11087.
11. Nuritdinovna, I. I. (2022). Improving the speech skills of students of Non Philological areas of education in the context of socio-cultural competence. *Web of Scientist: International Scientific Research Journal*, 3(02), 412-418.
12. Ilkhamova, I. (2022). Issues of improving socio-cultural competence of students in foreign language lessons. *Oriental Journal of Philology*, 2(1), 30-42.
13. Mamatkulov, K., Giyasova, U., Djuraev, A., Ilkhamova, I., & Baymanova, N. Eğitim Modernizasyonunun Ana Faktörlerinden Biri Olarak Yabancı Dil Öğretmenlerinin Mesleki Yeterliliğinin Geliştirilmesi. *Motif Akademi Halkbilimi Dergisi*, 7(13), 281-291.
14. Yunusova, N. A. (2022). Features of teaching a foreign language to preschool children. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, 2(3), 641-646.
15. Юнусова, Н. А. (2022). Хорижий тилларни ўқитишда инноватив методлардан фойдаланиш. ТДПУ илмий ахборотланомаси, 1(1), 106-109.
16. Yunusova, N. A. (2022). Formation of Foreign Language Speech skills in Preschool Children. Экономика и социум, 4(95), 200-204.

17. Yunusova, N. A. (2022). Origin development and types of the field of linguistics. International conference on Advance Research in Humanities Sciences and Education, 1(2), 55-65.
18. Юнусова, Н. А. (2012). Психодиагностика как необходимая составная часть педагогического мастерства читателя. Ойлада бола тарбияси, 1(2), 121-125.
19. Rahmatullayevna, B. Z. (2020). Methodical system of teaching computer animation in higher education institutions. *European Journal of Molecular & Clinical Medicine*, 7(2), 6252-6256.
20. Бакиева, З. Р. (2022). Талабаларга компьютерли анимацияни ўқитишда анимация яратиш босқичлари. Digital technologies in innovative education problems and solutions, 1(1), 206-210.
21. Бакиева, З. Р. (2022). Компьютерли анимацияни ўқитишнинг электрон таълим платформасини яратиш технологияси. *Fizika Matematika va Informatika*, 21(3), 177-181.
22. Бакиева, З. Р. (2021). К вопросу о создании и использовании электронной системы компьютерной анимации для студентов. *Наука и образование сегодня*, (10 (69)), 30-31.
23. Rakhmatullaevna, B. Z. (2020). Analysis of training computer animation at the international level and its application in Uzbekistan. *European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences Vol*, 8(8).
24. Rakhmatullayevna, B. Z. (2019). Stages of development of animation and improvement of animation and pedagogical activity in Uzbekistan. *European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences Vol*, 7(10).