GALAXY INTERNATIONAL INTERDISCIPLINARY RESEARCH JOURNAL (GIIRJ)
ISSN (E): 2347-6915
Vol. 10, Issue 1, Jan. (2022)

RIEMANN FUNCTION AND ITS REMARKABLE PROPERTIES

Gulchehrakhon Ortigalieva
National of Uzbekistan Student of the Faculty of Mathematics, University

ANNOTATION

In this article, the Riemann function and its special properties are discussed. Besides, some problems with their clear solutions are provided which will be followed by useful conclusions.

Keywords: The Riemann function, continuity, almost continuity, dense set, periodic function.

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada taniqli Riman funksiyasi va uning o'ziga xos xossalari haqida to'xtalib o'tiladi. Riman funksiyasi bilan bog'liq bir necha misollar o'z yechimi bilan o'quvchiga tushunarli ravishda taqdim etilgan va bir necha xulosalar keltirib o'tilgan.

Kalit so'zlar: Riman funksiyasi, uzluksizlik, deyarli uzluksizlik, zich to'plam, davriy funksiya.

АННОТАЦИЯ

В данной статье обсуждаются функция Римана и ее специальные свойства. Кроме того, приведены некоторые задачи с их четкими решениями, за которыми следуют полезные выводы.

Ключевые слова: функция Римана, непрерывность, почти непрерывность, плотное множество, периодическая функция.

INTRODUCTION

Riman funksiyasining bir nechta nomlari bor lekin asosan uni Toma funksiyasi deyishadi. Keling ushbu ajoyib funksiyaning go'zalliklari bilan tanishaylik.
Toma funksiyasi haqiqiy qiymatli funksiya bo'lib, quyidagicha ta'riflanadi:

$$f = \begin{cases} x \to 0, x \in R\,, \quad Q \\ \dfrac{p}{q} \to \dfrac{1}{q}, (p,q) = 1 \end{cases}$$

1-xossa. f davriy funksiya va uning davri 1ga teng.

Bu xossani isbotlash unchalik qiyin emas. Ma'lumki, $x \in R\,,\quad Q \Rightarrow x+1 \in R\,,\quad Q$ bo'lgani uchun kiritilishga ko'ra $f(x+1) = f(x) = 0$. Xuddi shunday, $y = \dfrac{p}{q} \in Q$ uchun

$$y+1 = \frac{p+q}{q} \Rightarrow \ f(y+1) = f(y) = \frac{1}{q}.$$

2-xossa. O'ng va chap hosilalari barcha nuqtalarda 0 ga teng.

Biror $x \in R$ nuqta olaylik. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $N > 1$ topiladiki, $0 < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

$$a = \sup\{c \in Z \mid c \le xN\} \quad x \in \left(\frac{a-1}{N}, \frac{a+1}{N}\right).$$

Endi o'ylab ko'ring!

$$A = \left\{ y \in Q\,,\ \ \{x\} \mid y = \frac{r}{s} \in \left(\frac{a-1}{N}, \frac{a+1}{N}\right) \right\} \text{ bu yerda } r \in Z,\ \ 0 < s \le N,\ \ (r,s) = 1.$$

Ta'rifga ko'ra $x \notin A$. Agar A bo'sh bo'lmasa, x dan A gacha masofani $D = d(x, A)$ deb belgilaymiz va qat'iy u musbat. Agar A bo'sh bo'lsa, $B = (\frac{a-1}{N}, \frac{a+1}{N})$ aks holda $B = (\frac{a-1}{N}, \frac{a+1}{N}) \cap (x - D, x + D)$ belgilash kiritamiz. Ikkala holatda ham B x ni o'z ichiga olgan ochiq interval. Tuzilishiga ko'ra $B \backslash \{x\}$ ratsional son emas d$\frac{r}{s}$ da $s \le N$. Shuning uchun $z \in B \backslash \{x\}$ bizda bor $0 \le f(z) < \frac{1}{N} < \varepsilon$. Shuni ko'rsatish kerak edi.

3-xossa. f barcha ratsional sonlarda uzulishga ega.

$x_n = \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{2}}\right)\frac{p}{q}$ ketma-ketlik $x = \frac{p}{q}$ ratsional songa yaqinlashadi. Barcha $n \ge 1$ butun sonlar uchun x_n irratsional son, chunki $\sqrt{2}$ irratsional sondir. Bundan ixtiyoriy n uchun $f(x_n) = 0$. Shuningdek, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0$, ammo $f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} > 0$. Demak, $x_n \to x \not\Rightarrow f(x_n) \to f(x)$. Ya'ni uzluksizlik sharti o'rinli emasligi kelib chiqdi.

4-xossa. f barcha irratsional sonlarda uzluksizdir.

Buning isbotini quyidagi misolda ko'rib chiqaylik.

Misol. Riman funksiyasi berilgan bo'lsin, $f : R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ \frac{1}{q}, x = \frac{p}{q} \in Q \backslash \{0\}, (p,q) = 1 \\ 0, x \notin Q \end{cases}$$

$$c \in Q\ ,\ \ f(c) > 0$$

Q^c da y_n ketma-ketlik berilgan va $y_n \to c$ bundan biz $f(y_n) = 0$ barcha $n \in N$

$$f(c) \neq 0 = \lim_{n \to \infty} f(y_n)$$

Bundan f har bir ratsional nuqtada uzluksiz ekanligi ko'rinadi. Boshqa tomondan, agar c irratsional bo'lsa bizda $f(c)=0$ bo'ladi.

R dan olingan har qanday $x_n \to c$ ketma-ketlik uchun agar $x \notin Q$ bo'lsa, $f(x_n)=0$ munosabat o'rinli. Agar $x \in Q$ bo'lsa, u holda x qisqarmas $\frac{p}{q}$ kasrning maxrajidir. Bundan

$$f(x_n) \to 0 \ , \ n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(c)$$

Bunda f har bir irratsional c da uzluksiz ekanligini ko'rsatadi.

5-xossa. f barcha ratsional nuqtalarda lokal maksimumga ega.

$a=\frac{p}{q}$ berilgan bo'lsin. U holda ta'rifiga ko'ra $f(a)=\frac{1}{q}$. Bu nuqtada chap va o'ng limitlari 0 ekanligini bilamiz, ya'ni $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 0$. Bundan shunday $\delta > 0$ topilib $0<|x-a|<\delta$ bo'ladigan barcha x lar uchun $0 \le f(x) \le \frac{f(a)}{2}$. Bundan $0 \le f(x) \le f(a)$ $x \in (a-\delta; a+\delta)$.

6-xossa. f Lebeg ma'nosida integrallanuvchi. f funksiya faqat ratsional argumentlarda 0 dan farqli qiymat qa'bul qiladi. Ammo , ratsional sonlar to'plamining Lebeg o'lchovi 0 ga teng. Bundan kelib chiqadiki f deyarli 0 ga teng.

Keling, quyidagi ajoyib misolni ko'rib chiqaylik.
Hamma Yerda Chekli Va Hamma Yerda Lokal Chegaralanmagan Funksiya

Agar x ratsional son bo'lsa, unga teng bo'lgan $\frac{m}{n}$ qisqarmas kasr yagona ravishda aniqlanadi. Shuning uchun quyidagi funksiya yaxshi aniqlangan:

$$f(x)=\begin{cases} n, x \in Q \\ 0, x \in R \ , \quad Q \end{cases} \quad \text{bunda } x=\frac{m}{n},(m,n)=1$$

Agar f $N(a,\varepsilon)$ (bu yerda N a ning ε atrofi) da chegaralangan bo'lsa, $N(a,\varepsilon)$ dagi barcha $\frac{m}{n}$ lar uchun n chegaralangan bo'lar edi, unda m soni ham shunday bo'ladi. Ammo $N(a,\varepsilon)$ oralig'ida cheklita ratsional sonlar mavjud.
Bu misolni biz teskari Riman funksiyasi desak ham bo'ladi.
Mana Riman funksiyasi haqida ozmi ko'pmi ma'lumotlarga ega bo'ldik. Matematika cheksizdir. Siz ham izlanib ko'ring, ehtimol biz bilmagan yanayam qiziqarli jihatlarini toparsiz!

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1.Counterexamples in analysis(Bernard R. Gelbaum, John M. H. Olmsted)

2.Thomae, J(1875), Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale(in German), Halle a/S: Verlag Louis Nebertt

3.Abbott, Stephen (2016), Understanding Analiysis (Softcover reprint of the original 2nd ed.), New York Springer, ISBN 978-1-4939-5026-3