GLEASON'S THEOREM FOR VECTOR-VALUED MEASURES ON PROJECTORS JBW-ALGEBRAS

A. A. Adizov
Associate Professor of the Department of "Mathematics and Information Technology" Fiscal Institute under the State Tax Committee of the Republic of Uzbekistan,Tashkent. Uzbekistan
a-adizov@mail.ru

ABSTRACT

Let A- JBW -algebra [1,2,3] with no direct summand of type I_2 ,and let $P(A)$ be its lattice of idempotents from A and X be a Banach space. In this paper, we prove that any finitely additive vector-valued measure $\mu : P(A) \to X$ has a unique extension to a bounded linear operator mapping A to X .

Keywords: Vector-valued measures, JBW -algebra, Hilbert spaces, enveloping -W^* algebras.

ТЕОРЕМА ГЛИСОНА ДЛЯ ВЕКТОРНО-ЗНАЧНЫХ МЕР НА ПРОЕКТОРАХ JBW - АЛГЕБР

А. А. Адизов
Доцент кафедры «математики и информационной технологии» Фискальный институт при Государственном налоговом комитете Республики Узбекистан, Тошкент.Узбекистан.
a-adizov@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Пусть A- JBW алгебра [1,2,3] без прямых слагаемых типа I_2, $P(A)$ -логика идемпотентов из A и X -банахово пространство. В данной работе доказано, что всякая конечно-аддитивная векторно-значная мера $\mu : P(A) \to X$ продолжается до ограниченного линейного оператора отображающего A в X .

Пусть A- JBW алгебра, $P(A) = \left\{ e \in A : e^2 = e \right\}$ -решетка проекторов (идемпо- тентов) из A и X - банахово пространство.

Ключевые слова: Векторно-значные меры, JBW - алгебра, гильбертовы пространства, обертывающая W^* -алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Ограниченная функция $\mu : P(A) \to X$ называется конечно-аддитивной векторно-значной мерой, если выполняются следующие два условия:

1. $\mu(e+f) = \mu(e) + \mu(f)$ для идемпотентов $e, f \in P(A)$, $e \cdot f = 0$;
2. $\sup\left\{ \|\mu(e)\| : e \in P(A) \right\} < \infty$.

Если при этом $X = R_+$, то μ называется скалярной мерой на проекторах A.
Если $\phi : A \to X$ - некоторый ограниченный линейный оператор, то его сужение $\phi|_{P(A)} = \mu$ на решетку $P(A)$ есть, очевидно, конечно-аддитивная векторно-значная мера.
Обратно, пусть на $P(A)$ задана некоторая векторно-значная конечно-аддитивная мера μ . В самой общей постановке проблема существования ограниченного линейного оператора $\phi : A \to X$, сужением которого на $P(A)$ является μ, имеет отрицательное решение: на спин факторе (JBW -факторе типа I_2) легко построить примеры конечно-аддитивных векторно-значных мер, не являющихся сужениями никаких ограниченных линейных операторов $\phi : A \to X$ [4]. Однако если рассмотреть JBW - алгебры без прямых слагаемых типа I_2 то, как и в случае алгебр Фон Неймана[4], проблема имеет положительное решение.
Используя метод работы [4] доказывается следующая:

Теорема 1. Пусть A - JBW - алгебра без прямых слагаемых типа I_2 . Тогда всякую конечно-аддитивную векторно-значную меру μ на идемпотентах A можно единственным образом продолжить до ограниченного линейного оператора отображающего A в X .

Доказательство. Элементарные оценки показывают, что когда $\varphi \in A^*$ имеет место неравенство

$$\|\varphi\| \le 4\sup\{|\varphi(p)| : p \in P(A)\}$$

Пусть K - такая константа, что $\|\mu(p)\| \le K$ для каждого $p \in P(A)$.
Для любого $\phi \in X^*$, $p \to \phi(\mu(p))$ является скалярной мерой на $P(A)$. Тогда в силу основного результата работы [5] существует $\psi \in A^*$ такое, что $\psi(p) = \phi\mu(p)$ для каждого $p \in P(A)$.

Пусть $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j$ - конечная линейная комбинация проекторов $p_j \in P(A), (\mathrm{j} = \overline{1,n})$.

Тогда

$$\phi\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu\left(p_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \phi\mu\left(p_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \psi\left(p_j\right) = \psi\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j\right) = \psi(x).$$ Отсюда

$$\phi\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu\left(p_j\right)\right) \le 4\|x\|\|\phi\|\sup\{\|\mu(p)\| : p \in P(A)\} \le 4\|x\|\|\phi\| K$$

Тогда из теоремы Хана-Банаха следует, что $\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j m\left(p_j\right)\right\| \le 4K\|x\|$

GALAXY INTERNATIONAL INTERDISCIPLINARY RESEARCH JOURNAL (GIIRJ)
ISSN (E): 2347-6915
Vol. 10, Issue 7, July (2022)

В частности, из $\sum_{j}^{n}\lambda_j p_j = 0$ следует $\sum_{j}^{n}\lambda_j \mu(p_j) = 0$. Значит, μ имеет единственное продолжение до линейного оператора $T : SpanP(A) \to X$.

$$\left\| T\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p_j\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j m\left(p_j\right)\right\| \le 4K\left\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j p_j\right\|$$

Таким образом, T ограничен и, следовательно, имеет единственное расширение до ограниченного линейного оператора из A в X.

Теорема доказана.

Пусть теперь A - JW алгебра, действующая в гильбертовом пространстве H [6]. Если на решетке $P(A)$ задана конечно-аддитивная векторно-значная мера μ, то естественно возникает вопрос о возможности продолжения μ до конечно-аддитивной векторно-значной меры на решетке $P_1(U)$ -проекторов обертывающей W^* -алгебры (алгебры Фон Неймана) $U(A) = A''$ [3,7]. В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. В самом деле, пусть A - бесконечномерный спин фактор (JW -фактор типа I_2) такой, что $U(A)$ является W^* - фактором типа II_1 (существование такого A вытекает из [8](теорема 2)). Тогда в силу основного результата работы [4] всякую конечно-аддитивную векторно-значную меру на $P_1(U)$ можно продолжить до ограниченного линейного оператора отображающего $U(A)$ в X. В тоже время на спин факторе A существует конечно-аддитивная векторно-значная мера, которая не продолжается до ограниченного линейного оператора. Это противоречие показывает, что не всякая конечно-аддитивная векторно-значная меры на проекторах спин фактора A продолжается до конечно-аддитивной векторно-значной меры на проекторах обертывающей W^* -алгебры $U(A)$.

Однако если рассмотреть JW - алгебру A без прямых слагаемых типа I_2 то, то вопрос о продолжении конечно-аддитивной векторно-значной меры на проекторах A до конечно-аддитивной векторно-значной меры на проекторах $U(A)$, эквивалентен проблеме о продолжении конечно-аддитивной векторно-значной меры μ на $P(A)$ до ограниченного линейного оператора на A. Тогда из теоремы 1 вытекает следуюшая:

Теорема 2. Пусть A - JW алгебра без прямых слагаемых типа I_2 и X -банахово пространство. Тогда всякая конечно-аддитивная векторно-значная мера на проекторах A продолжается до конечно-аддитивной векторно-значной меры на проекторах обертывающей W^* -алгебры $U(A)$.

REFERENCES

1. Shultz F.M. On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces. J. Functional Analysis, 1979, vol. 31, №3, p. 360-376.
2. Сарымсаков Т.А., Аюпов Ш.А., Хаджиев ДЖ., Чилин В.И. Упорядоченные алгебры. Ташкент. “ФАН” , 1983.
3. Аюпов Ш.А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент. “ФАН”, 1986.
4. L. J. Bunce and J. D. M. Wright, The Mackey-Gleason problem. Bulletin (New Series) of the Amer. Math. Soc. 1992, vol. 26, № 2, p. 288-293.
5. L. J. Bunce and J. D. M. Wright, Continuity and linear extensions of quantum measures on Jordan operator algebras, Math. Scand. 64 (1989), 300-306). MR1037464 (91f:46096)
6. Topping D. Jordan algebras of self-adjoint operators. Mem. Amer. Math. Soc. 1965, № 53, p. 1-48.
7. Ayupov Sh.A., Extensionof traces and type criterions for Jordan algebras of self-adjoint operators. Math.Z., 1982, Vol.181.P. 253-268.
8. Topping D. An isomorphism invariant for spin factors. J. Math.Mech., 1966, vol.15, p. 1055-1064.